Université Paris-Diderot | Année 2014-2015
U1CD35 - Calcul différentiel et topologie | L3 MIASHS

Interrogation écrite 2

23 Octobre 2014

Durée : 50 minutes

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1 (barème indicatif : 6 points).
Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

(a) Définir l'image directe de $A \subseteq X$ par f et l'image réciproque de $B \subseteq Y$ par f.

Considérons une distance d_X sur X et une distance d_Y sur Y.

(b) Définir en utilisant les notions d'images directes ou réciproques l'assertion :
f est continue de (X, d_X) dans (Y, d_Y).

(c) Définir à l'aide de quantificateurs l'assertion :
f est uniformément continue de (X, d_X) dans (Y, d_Y).

(d) Définir à l'aide de quantificateurs l'assertion :
f est lipschitzienne de (X, d_X) dans (Y, d_Y).

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X et $x \in X$. Définir sous deux formes, à l'aide de quantificateurs et sans quantificateur par une phrase en langue française syntaxiquement et mathématiquement correcte, chacune des assertions suivantes :

(e) x est la d_X-limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(f) x est une d_X-valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (barème indicatif : 10 points).
L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé muni de la norme « valeur absolue ». Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'application f de I dans $\mathbb{R}$ est continue ou non, uniformément continue ou non, Lipschitzienne ou non et prouver soigneusement vos réponses :

(a) $I = [1, +\infty[$ et, pour tout $x \in I$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

(b) $I =]0, 1]$ et, pour tout $x \in I$, $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 3 (barème indicatif : 6 points).
Soit $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ l'application donnée par

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 5x + 2y),$$

où $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont les normes définies sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels respectifs $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad & \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \\ \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \qquad & \|(u, v, w)\|_\infty = \max\{|u|, |v|, |w|\}. \end{aligned}$$

(a) Justifier que f est une application linéaire continue.

(b) Donner la définition de la norme subordonnée $\|f\|_{\mathrm{op}}$ de f.

(c) Calculer $\|f\|_{\mathrm{op}}$. Justifier soigneusement.